Introduzione al Metodo degli Elementi Finiti

Problemi e metodologie di soluzione in campo nonlineare

Raffaele Casciaro

Università della Calabria
http://www.labmec.unical.it

Newsoft s.a.s. - Cosenza
http://www.newsoft-eng.it

L'Aquila–Pescara ottobre 2010

Obbiettivi della presentazione

- Non si riesce realmente a comprendere le problematiche ed i limiti dell'analisi nonlineare se non se ne conoscono le metodologie operative e gli algoritmi di soluzione.
- L'analisi nonlineare è stata in effetti resa possibile da un approccio computazionale, generalmente indicato come **Metodo degli Elementi Finiti**.
- Il metodo si è andato sviluppando insieme alla disponibilità di macchine da calcolo sempre più potenti, dalle prime calcolatrici elettromeccaniche agli attuali microcomputer multiprocessore.
- Attualmente rappresenta lo strumento più importante e diffuso nell'ingegneria strutturale, l'unico in grado di affrontare le difficoltà dell'analisi in campo nonlineare.
- Si vuole in questa sede, sia pur sinteticamente, tracciarne l'evoluzione, presentarne le caratteristiche principali e descriverne le metodologie di soluzione.

Analisi lineare e nonlineare

- La principale differenza qualitativa tra l'analisi in campo lineare e nonlineare risiede nella perdita del principio di sovrapposizione degli effetti.
- In analisi lineare la risposta della struttura ad una combinazione di azioni diverse può essere ottenuta sommando le risposte separate corrispondenti a ciascuna delle azioni. Ciò implica:
  1. ovvia semplificazione nella gestione di condizioni di carico complesse
  2. garanzia che gli effetti prodotti da piccole perturbazioni nei carichi siano anche essi piccoli
- Pertanto, le eventuali piccole differenze fra la situazione reale e lo schema ideale di calcolo, dovute alla fluttuazione dei carichi, a imperfezioni geometriche e a difetti dei materiali, possono essere ignorati senza pregiudicare l'affidabilità dei risultati.
- Ciò non è più vero in generale in campo nonlineare. Perturbazioni anche piccole nei dati possono produrre variazioni notevoli nella risposta e portare a soluzioni anche qualitativamente diverse.

Sensibilità alle imperfezioni

La nostra conoscenza della realtà strutturale è essenzialmente imprecisa:

- le azioni agenti sulla struttura sono valutate solo in termini di medie e presentano una forte fluttuazione aleatoria
- imperfezioni nella geometria e nei materiali sono essenzialmente aleatorie e definite solo in termini di valori caratteristici in base alle prescrizioni sulle tolleranze accettabili
- un'analisi basata su valori medi è generalmente insufficiente a fornire una valutazione affidabile del soddisfacimento delle prescrizioni prestazionali e della sicurezza rispetto al collasso
- è quindi necessario svolgere analisi separate per ciascuna delle possibili combinazioni di carico e per tutte le possibili imperfezioni

L'analisi richiede un impegno notevole di calcolo, reso possibile solo dall'incremento delle prestazioni hardware e dallo sviluppo di teorie e metodologie di calcolo sempre più potenti ed ottimizzate.

Il Metodo degli Elementi Finiti

La tecnica di discretizzazione e soluzione che forma il cosiddetto Metodo degli Elementi Finiti (FEM) rappresenta la base dell'approccio computazionale all'analisi delle strutture. Allo sviluppo del metodo hanno contribuito:

1. l'approccio energetico proposto da Castigliano alla fine del 19^o secolo
2. i lavori di Ritz e Galerkin su soluzioni approssimate attorno al 1920
3. lo sviluppo di tecniche di soluzione numerica iniziato a partire dal 1930
4. l'evoluzione, nella sua forma attuale, avvenuta nel corso della seconda guerra mondiale e nell'immediato dopoguerra
5. il forte interesse tecnico/ingegneristico, in ambito aeronautico, civile e meccanico.

L'importanza dell'approccio quale collegamento fondamentale tra meccanica dei continui, analisi numerica e calcolo digitale, è diventata subito evidente dopo le prime pubblicazioni sull'argomento nei primi anni '50.
La successiva diffusione del metodo come strumento base per l'analisi strutturale è stata di seguito favorita dal progressivo incremento in potenza e diffusione dei computers e dal progresso sia teorico che algoritmico della ricerca.

Formulazione energetica

L'idea centrale alla base del metodo FEM è quella di riferirsi all'energia potenziale

$$\Pi[u] := \Phi[u] - p\,u$$

dove u indica la configurazione della struttura (spostamenti e tensioni), e p l'azione esterna assegnata (forze e distorsioni), somma dell'energia interna di deformazione $\Phi[u]$ e del lavoro esterno bilineare $p\,u$.
Suddividendo la struttura in piccoli elementi ed usando appropriate interpolazioni al loro interno, la $\Pi[u, p]$ può essere ricondotta ad una forma algebrica tale che l'equilibrio, possa essere espresso come equazione vettoriale n–dimensionale

$$\mathbf{s}[\mathbf{u}] - \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

in cui i vettori **s** e **p**, che esprimono la risposta strutturale interna e l'azione esterna, sono definiti dalle equivalenze energetiche

$$\mathbf{s}[\mathbf{u}]^T \delta\mathbf{u} := \Phi'[u]\,\delta u \quad , \quad \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u} := p\,\delta u$$

Sono possibili diverse tecnologie di discretizzazione (elementi compatibili, misti, discretizzazioni meshless o altro). In ogni caso, in formulazioni coerenti, l'accuratezza migliora infittendo il reticolo di discretizzazione.

Analisi lineare

L'analisi lineare assume che $\Phi[u]$ sia quadratica in u e quindi che la risposta $\mathbf{s}[\mathbf{u}]$ possa ridursi ad una funzione lineare

$$\mathbf{s}[\mathbf{u}] := \mathbf{K}\,\mathbf{u}$$

legata ad $\mathbf{u}$ attraverso una matrice di rigidezza simmetrica e definita positiva $\mathbf{K}$, definita dall'equivalenza energetica con la variazione seconda di $\Phi[u]$

$$\delta\mathbf{u}^T\mathbf{K}\delta\mathbf{u} := \Phi''\delta u^2$$

La condizione di equilibrio si riduce pertanto ad un sistema lineare simmetrico

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}$$

la cui soluzione può essere ottenuta, con relativa facilità, mediante l'algoritmo di decomposizione di Cholesky che produce una espressione computazionalmente conveniente per l'inversa $\mathbf{K}^{-1}$ della $\mathbf{K}$, di cui sfrutta pienamente alcune caratteristiche tipiche quali sparsità e struttura bandata.

Analisi nonlineare

In analisi nonlineare, la funzione $\mathbf{s}[\mathbf{u}]$ può assumere una forma sensibilmente più complicata. Tuttavia, alla configurazione corrente $\mathbf{u}$, può essere associata la **matrice di rigidezza tangente** $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}]$ definita dalla equivalenza

$$\delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}_t[\mathbf{u}]\delta\mathbf{u} := \Phi[u]''\delta u^2$$

La matrice fornisce una informazione completa dell'energia $\Phi[u]$, nell'intorno di secondo ordine di $\mathbf{u}$, e può essere usata per collegare piccoli incrementi $\dot{\mathbf{u}}$ di $\mathbf{u}$ ai corrispondenti incrementi $\dot{\mathbf{s}}$ di $\mathbf{s}$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_t[\mathbf{u}]\dot{\mathbf{u}}$$

La soluzione di equilibrio può quindi essere ottenuta mediante iterazione alla Newton

$$\mathbf{u}_{j+1} := \mathbf{u}_j - \mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j]^{-1}\mathbf{r}_j \quad , \quad \mathbf{r}_j := \mathbf{s}[\mathbf{u}_j] - \mathbf{p} \quad , \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

in cui $\tilde{\mathbf{K}} \approx \mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j]$, $\mathbf{r}_j$ è il residuo all'equilibrio corrispondente alla valutazione corrente di $\mathbf{u}_j$ e $\mathbf{u}_{j+1}$ è la sua iterata. Sotto opportune condizioni

$$0 < \mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j] < 2\,\tilde{\mathbf{K}}$$

lo schema converge ad una valutazione $\mathbf{u}$ che azzera il residuo.

Analisi al passo: idea base

- L'analisi incrementale al passo, o **Analisi Path–following** rappresenta lo strumento largamente più utilizzato in analisi nonlineare.
- L'idea base è quella di ricostruire il percorso di equilibrio $\mathbf{u}[\lambda]$ conseguente ad un assegnato processo di carico $\mathbf{p}[\lambda]$ attraverso una sequenza di punti di equilibrio $\{\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ sufficientemente vicini tra loro da fornire, per interpolazione, la curva di equilibrio definita dalla condizione implicita

$$\mathbf{s}[\mathbf{u}[\lambda]] - \mathbf{p}[\lambda] = \mathbf{0}$$

- Usualmente, si considera un processo di carico proporzionale

$$\mathbf{p}[\lambda] := \mathbf{p}_0 + \lambda \hat{\mathbf{p}}$$

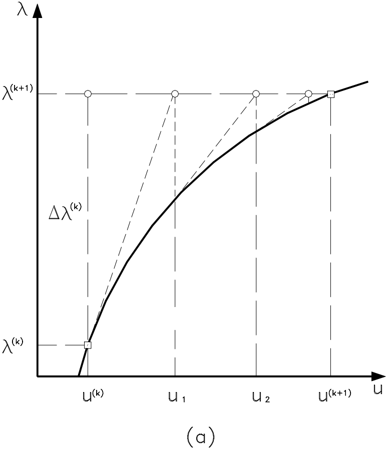
  in modo che il parametro λ che ne regola l'evoluzione possa essere interpretato come moltiplicatore di sicurezza associato alla condizione nominale di carico $\hat{\mathbf{p}}$.
- Per intenderci, l'analisi Pushover è una analisi Path–following.

Strategia incrementale a controllo di carico

La sequenza dei punti di equilibrio può essere costruita con strategie diverse. Quella apparentemente più semplice può essere così descritta:

1. Si assegnano successivi incrementi $\Delta\lambda^{(k)}$ al moltiplicatore dei carichi ($\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)}$).
2. In ogni passo, partendo da una stima iniziale ottenuta per estrapolazione del passo precedente, la soluzione corrispondente $\mathbf{u}^{(k+1)} := \mathbf{u}[\lambda^{(k+1)}]$ viene ricavata con iterazioni alla Newton.
3. La matrice di iterazione $\tilde{\mathbf{K}}$ è definita in corrispondenza alla configurazione di inizio passo o (a volte meglio) di prima estrapolazione.
4. Se l'iterazione rallenta o perde convergenza, il processo iterativo è interrotto ed il passo viene ripetuto utilizzando un incremento $\Delta\lambda$ sensibilmente più piccolo, in modo da mantenere $\tilde{\mathbf{K}}$ vicina $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j]$.

Iterazione alla Newton (a) e Newton Modificato (b)



Vantaggi e difetti della strategia

- Anche se semplice, questa strategia di soluzione risulta efficiente e robusta ed è stata largamente utilizzata in passato. La strategia si comporta in effetti molto bene nella fase iniziale, a bassa nonlinearità, del processo di carico.
- Per sua natura, tuttavia, tende a fallire vicino a punti di carico limite, in cui la matrice tangente $\mathbf{K}_t$ diventa singolare e, di conseguenza, non è più soddisfatta la condizione di convergenza $\mathbf{0} < \mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j]$.
- Generalmente si è particolarmente interessati alla sicurezza a collasso della struttura, a stimarne cioè il carico limite dove, per definizione $\mathbf{K}_t$ è singolare, e quindi ciò rappresenta un inconveniente significativo nella strategia.
- Per lungo tempo, questo difetto è stato considerato una caratteristica intrinseca, non sanabile, dell'approccio incrementale.
- Solo alla fine degli anni '70 (Riks) si è riconosciuto che la difficoltà di convergenza in corrispondenza al carico limite non era altro che una conseguenza banale della scelta fatta, di controllare cioè l'evoluzione del percorso di equilibrio attraverso il parametro di carico λ.

Strategia arc-lenght (Riks 1979)

- In corrispondenza a punti limite, la funzione $\mathbf{u}[\lambda]$ non è analitica in λ e non sorprende pertanto che definire la sequenza $\mathbf{u}^{(k)}$ attraverso incrementi $\Delta\lambda^{(k)}$ possa creare difficoltà.
- Queste possono essere facilmente evitate dal semplice accorgimento di utilizzare una parametrizzazione analitica $\{\mathbf{u}[\xi], \lambda[\xi]\}$, dove ξ è una ascissa curvilinea che descrive la curva di equilibrio nello spazio $\{\mathbf{u}, \lambda\}$, e di definire la sequenza $\{\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ assegnando le ampiezze $\Delta\xi^{(k)}$ dei singoli archi di curva.
- Lo schema iterativo diventa:

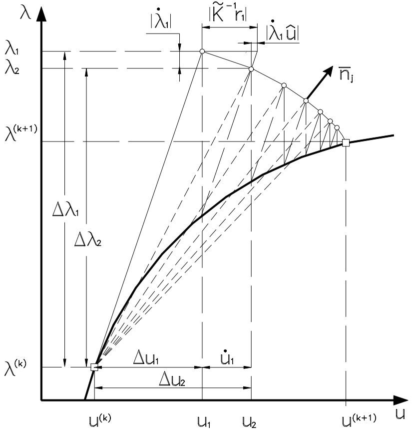
$$\mathbf{u}_{j+1} := \mathbf{u}_j + \dot{\mathbf{u}}_j \quad , \quad \lambda_{j+1} := \lambda_j + \dot{\lambda}_j$$

dove le correzioni iterative $\dot{\mathbf{u}}_j$ e $\dot{\lambda}_j$ sono ottenute come soluzione del sistema lineare

$$\mathbf{J}_j \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{\lambda}_j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_j \\ g_j \end{array} \right\} \quad , \quad \mathbf{J}_j := \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j] & -\hat{\mathbf{p}} \\ \Delta\mathbf{u}_j^T\mathbf{M} & \mu\Delta\lambda_j \end{array} \right]$$

- Ne risulta un sistema di $n+1$ equazioni nonlineari nelle $n+1$ incognite $\mathbf{u}^{(k+1)}$ e $\lambda^{(k+1)}$ che può essere risolto con iterazione alla Newton.

Schema iterativo arc-lenght



La strategia "arc–length" presenta caratteristiche di convergenza migliori di quella a controllo di carico e permette di superare facilmente i punti limite e di seguire agevolmente le zone discendenti del percorso di equilibrio.

Evoluzione del metodo arc-length

- La strategia "arc–length", la cui convenienza divenne subito evidente, acquistò rapidamente una grande popolarità generando un gran numero di articoli successivi con proposte di varianti, sia nella scelta della metrica utilizzata per definire l'ampiezza di passo che nei dettagli algoritmici che regolano l'estrapolazione iniziale, l'aggiornamento della matrice di iterazione e le opzioni di ripristino.
- Molte di queste erano dettate da occasionali (anche se frequenti) difficoltà di convergenza, spesso in corrispondenza a punti di carico limite. Le varianti all'algoritmo iniziale di Riks erano quindi essenzialmente rivolte (a torto) allo sviluppo di accorgimenti che meglio servissero ad aggirare le difficoltà di convergenza legate al venir meno della condizione $\mathbf{0} < \mathbf{K}_t$.
- Successivamente (1998) si realizzò che l'inconveniente era dovuto ad un fenomeno di locking (locking da estrapolazione) che inficiava la condizione $\mathbf{K}_t < 2\,\tilde{\mathbf{K}}$.
- Una volta riconosciuto, il locking è facilmente eliminato con schemi iterativi di tipo misto, in spostamenti e tensioni, ottenendo così (con modifiche secondarie di codice) un algoritmo solutivo veloce e robusto.

Analisi incrementale in plasticità

L'analisi incrementale al passo arc–length rappresenta la strategia attualmente più diffusa in ambito nonlineare. Il suo utilizzo in elasto-plasticità richiede tuttavia alcuni ulteriori chiarimenti:

1. La formazione di nuove zone plastiche, o il ritorno in fase elastica di quelle già presenti, rende discontinua la matrice tangente $\mathbf{K}_t[u]$.
2. La presenza di salti nella $\mathbf{K}_t[\mathbf{t}]$ ne rende problematica la valutazione. Limita anche il miglioramento delle proprietà di convergenza di schemi iterativi alla Newton mediante una riduzione l'ampiezza del passo.
3. Il legame elasto–plastico è per sua natura anolonomo. Quindi è impossibile, in linea di principio, definire un legame univoco che fornisca la risposta $\mathbf{s}$ in funzione delle sole condizioni iniziali e dello spostamento di fine passo $\mathbf{u}$, ma anche da come il passo viene in realtà eseguito.
4. Una risposta a questa ambiguità è stata offerta dalla **Teoria dei Percorsi Estremali** (Ponter e Martin (1972)).
5. La teoria consente di definire un legame olonomo coerente in grado di fornire non solo le tensioni ma anche gli incrementi di deformazione plastica raggiunti nel passo.

Analisi limite e shakedown

La soluzione incrementale risulta in effetti molto efficiente, tanto da risultare conveniente anche se non siamo interessati a descrivere la curva di equilibrio, ma soltanto a valutare il moltiplicatore di collasso.

- Il moltiplicatore di collasso è definito dai teoremi dell'analisi limite e può essere ottenuto come soluzione di un problema di ottimizzazione su un insieme convesso utilizzando gli algoritmi standard sviluppati per questo contesto.
- I più recenti fra questi, basati sull'approccio **interior point** sono in realtà molto robusti ed efficienti e possono essere usati in forma di solutore esterno standard per problemi di analisi limite.
- Vi sono tuttavia forti analogie tra gli algoritmi interior–point e la strategia incrementale arc–length. Tanto che questa seconda può essere vista come una implementazione dedicata dell'interior–point e quindi potenzialmente più conveniente.
- Schemi incrementali analoghi al path–following sono anche utilizzabili nell'analisi ad adattamento (shakedown) e, anche in questo caso possono essere visti come implementazioni dedicate, particolarmente efficienti, dell'algoritmo interior–point.